

ANALIZA FUNKCJONALNA Z TOPOLOGIĄ

WPPT 4r., sem. letni
KOŁOKWIUM 1

Wrocław, 29 kwietnia 2013

ZADANIE 1A

- (a) (2p) Sformułuj twierdzenie o odwzorowaniu otwartym.
(b) (4p) Mając $f \in L^1([0, 1])$ tworzymy funkcję $g_f(x) = \int_0^x f(t) dt$. Wyjdzie funkcja ciągła przyjmująca w zerze wartość zero. Czy otrzymamy w ten sposób wszystkie takie funkcje?

Wskazówka: W zadaniu opisany jest operator ograniczony $T : L^1([0, 1]) \rightarrow C_0([0, 1])$ (w funkcje ciągłe spełniające $f(0) = 0$). Czy jest on odwzorowaniem otwartym?

ZADANIE 1B.

- (a) (2p) Sformułuj twierdzenie Banacha–Steinhaus.
(b) (4p) Niech (x_n) będzie ciągiem liczb zespolonych o tej własności, że dla każdego ciągu $(y_n) \in c_0$ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ jest zbieżny. Udowodnić, że (x_n) należy do ℓ^1 .
Wskazówka: Rozważ rodzinę funkcjonalów na ℓ^∞ zadanych przez sumy skończone jak wyżej. Zinterpretuj wniosek z twierdzenia B-S.

ZADANIE 2A.

- (a) (2p) Sformułuj twierdzenie o odwzorowaniu odwrotnym.
(b) (3p) Na przestrzeni wszystkich ciągów skończonych (mających tylko skończenie wiele wyrazów niezerowych) z normą supremum rozważ operator

$$T(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \dots).$$

Jest on ograniczony (o normie 1) i odwracalny. Czy odwrotny jest ograniczony? Dlaczego nie stosuje się twierdzenie z punktu (a)?

ZADANIE 2B.

- (a) (2p) Sformułuj twierdzenie o wykresie domkniętym.
(b) (3p) X, Y, Z są przestrzeniami Banacha. $T : X \rightarrow Y$ jest liniowy, $S : Y \rightarrow Z$ jest ciągły i różnowartościowy, $S \circ T : x \rightarrow Z$ jest ciągły. Wykaż, że T jest ciągły.

ZADANIE 3A.

- (3p) Sformułuj twierdzenie o rozdzielaniu zbiorów wypukłych, w tym jeden domknięty.

ZADANIE 3B.

- (3p) Sformułuj twierdzenie o rozdzielaniu zbiorów wypukłych, w tym jeden otwarty.

ZADANIE 4A.

- (a) (2p) Podaj definicję ciągu uogólnionego.
(b) (2p) Podaj kryterium zwartości przy pomocy ciągów uogólnionych.

ZADANIE 4B.

- (a) (2p) Jak definiuje się topologię produktową?
- (b) (2p) Sformułuj twierdzenie Tichonowa.

ZADANIE 5A.

- (a) (2p) Sformułuj aksjomat rozdzielania T_4 .
- (b) (2p) Podaj warunek równoważny T_4 przy założeniu zwartości.

ZADANIE 5B.

- (a) (2p) Podaj definicję bazy danej topologii.
- (b) (2p) Podaj warunek równoważny na to, aby rodzina zbiorów była bazą jakiejś topologii.

Tomasz Downarowicz